ӘОЖ 511.17

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУ ДАҒДЫЛАРЫН ДАМЫТУ МАҚСАТЫНДА 7-11 СЫНЫП ОҚУШЫЛАРЫ ҮШІН САНДАР ТЕОРИЯСЫ БОЙЫНША КҮРДЕЛІЛІГІ ЖОҒАРЫ ЕСЕПТЕР ЖҮЙЕСІН ҚАЛЫПТАСТЫРУ

Даржанова Улпан Беймбетовна
beimbetkizi@bk.ru
«7М01503 - Математика. Білім беру үдерісін басқару»
білім беру бағдарламасының 1 курс магистранты
Х.Досмұхамедов атындағы Атырау университеті, Атырау қ, Қазақстан Республикасы Ғылыми жетекшісі: ф.-м.ғ.к., профессор **Шаждекеева Н.К.**

Аңдатпа
Бұл мақалада сандар теориясы бойынша күрделілігі жоғары есептерді қолдана отырып, 7-11 сынып оқушыларының математикалық есептерді шешу дағдыларын дамыту мәселесі қарастырылады. Сандар теориясы — математиканың маңызды салаларының бірі, ол есептерді шешу барысында логикалық ойлауды дамытады. Негізгі назар модульдік арифметика әдісі мен Евклидтің бөлгіштік леммасына аударылады. Бұл тақырыптар есептерді шешудің тиімді әдістерін ұсынады, сонымен қатар оқушылардың математикалық талдау қабілеттерін жетілдіруге мүмкіндік береді.
Негізгі сөздер: математика, сандар теориясы. математикалық есептер, бөлгіштік, логикалық ойлау, қалдықтар, теңдеулер, модуль

Сандар теориясы — математиканың ең көне және маңызды салаларының бірі. Ол сандардың қасиеттерін, олардың арасындағы байланыстарды зерттейді және адамзат тарихының алғашқы кезеңдерінен бастап дамып келеді. Бұл ғылым санау жүйелерінен бастап, Пифагор сандары, бөлінгіштік қасиеттері, сандардың симметриясы сияқты күрделі құрылымдарға дейінгі көптеген ұғымдарды қамтиды. Уақыт өте келе, математиктер сандардың жаңа әрі ерекше қасиеттерін ашып, олардың қолдану аясын кеңейтті. Қазіргі заманда математиканың көптеген жетілдірілген әдістері бар болса да, элементар сандар теориясының негізгі қағидалары мен әдістері әлі де өз маңызын жойған жоқ. Бұл әдістерді терең меңгеру математикалық есептерді шешуде және логикалық ойлау қабілетін дамытуда маңызды рөл атқарады.

Орта мектеп оқушылары үшін сандар теориясын меңгеру олардың аналитикалық ойлау қабілетін дамытып, олимпиадалық және зерттеушілік жұмыстарға дайындығын жақсартады. Бұл мақалада сандар теориясының екі маңызды тақырыбы қарастырылады: модульдік арифметика әдісі және евклидтің бөлгіштік леммасы. Бұл әдістер оқушылардың есептерді шешу дағдыларын дамытуда тиімді құралдар болып табылады.

1. Модульдік арифметика әдісі

Модульдік арифметика – бүтін сандар арасындағы қатынастарды зерттейтін математикалық әдіс. Бұл әдіс көптеген олимпиадалық есептерді шешуде қолданылады және үлкен сандармен жұмыс істегенде есептеулерді жеңілдетуге көмектеседі.

Егер a және b сандары бірдей m модулі бойынша тең болса онда былай жазылады.
$a \equiv b (mod\ m)$
Бұл дегеніміз, a және b бір санға бөлінгенде бірдей қалдық береді.

Қалдықтарды қосу, азайту және көбейту модуль бойынша жүргізіледі:

$$(a + b) \equiv (c + d)(mod\, m)$$
$$(a * b) \equiv (c * d)\ (mod\, m)$$

Есеп-1:

Берілген теңдеуді шешейік:

$$7x \equiv 1(mod\, 10)$$

Бұл теңдеудің шешімін табу үшін 7-нің 10 модулі бойынша кері элементін табу қажет. Яғни, $7y \equiv 1(mod\, 10)$ теңдігін қанағаттандыратын y мәнін анықтау керек.

Шешімі: $y + 3$, өйткені $7 * 3 = 21 \equiv 1(mod\, 10)$

Демек, $x \equiv 3(mod\, 10)$ – берілген теңдеудің шешімі.

Есеп-2: күнделікті өмірге негізделген

Таңертеңгі сағат 7:00-де саяхатшы жолға шықты. Ол әр 9 сағат сайын аялдама жасап отырады. Егер саяхатшы үшінші аялдамасына дейін жетсе, сол кезде тәуліктің қай уақыты болады?

Шешуі:

Әр аялдама сайын 9 сағат өтеді. Үшінші аялдама дегеніміз – бастапқы уақыттан $3 * 9 = 27$ сағат өткенін білдіреді.

Бізге 27 сағаттан кейінгі уақытты табу керек. Сағат жүйесі – 24 модульмен жұмыс істейді, өйткені тәуліккте 24 сағат бар.

$$7 + 27 = 34$$
$$34(mod\, 24) = 10$$

Жауабы: Саяхатшы үшінші аялдамаға сағат 10:00-де жетеді.

Есеп-3: Математикалық (модульмен көбейту және қалдық)

Бүтін сандардан тұратын бір есепте 23*19 өрнегінің 17 модулі бойынша мәнін табу керек. Яғни: $23 * 19 \equiv ?\ (mod\, 17)$

Шешуі:

Алдымен көбейтеміш:

23*19 = 437

Енді 437 санын 17-ге бөлеміз:

437 ÷ 17 = 25 бүтін, қалдық — 437 - (17 × 25) = 437 - 425 = 12

Жауабы: $23 * 19 \equiv 12(mod\, 17)$

Модуль арқылы теңдеу шешу мысалы

Есеп-4:

x ≡ 4 (mod 7)

x ≡ 2 (mod 5)

Шешуі:

Біз x-ті 7-ге бөлгенде қалдық 4, ал 5-ке бөлгенде қалдық 2 болатынын білеміз. Мұндай жүйелер Қытай қалдықтар теоремасы арқылы шешіледі. Жауабы: x ≡ 18 (mod 35)

2. Евклидтің бөлгіштік леммасы

Евклидтің бөлгіштік леммасы сандардың бөлінгіштік қасиеттерін зерттеуде негізгі құралдардың бірі болып табылады. Бұл лемма келесідей тұжырымдалады:

Егер p жай сан және p саны ab көбейтіндісін бөлсе, онда p кем дегенде a-ға немесе b-ға бөлінеді.

Евклид алгоритмі:

Екі санның ең үлкен ортақ бөлгішін (ЕҮОБ) табу үшін Евклид алгоритмі қолданылады. Бұл алгоритм сандарды бір-біріне қайталанып бөлу арқылы жүзеге асады.

Есептер:

1. Берілген екі санның ЕҮОБ-ін табайық: 252 және 105.

$$252 = 105 * 2 + 42$$
$$105 = 42 * 2 + 21$$

$$42 = 21 * 2 + 0$$

Соңғы қалдық 0 болғандықтан, ЕҮОБ(252, 105) = 21.

2. Берілген екі санның ЕҮОБ-ін табайық: 370 және 100.

$$370 = 3 * 100 + 70$$
$$100 = 70 * 1 + 30$$
$$30 = 10 * 3 + 0$$

Соңғы қалдық 0 болғандықтан, ЕҮОБ(370, 100) = 10.

3. Берілген екі санның ЕҮОБ-ін табайық: 124 және 440.

$$440 = 124 * 3 + 68$$
$$124 = 68 * 1 + 56$$
$$68 = 56 * 1 + 12$$
$$56 = 12 * 4 + 8$$
$$12 = 8 * 1 + 4$$
$$8 = 4 * 2 + 0$$

Соңғы қалдық 0 болғандықтан, ЕҮОБ(124, 440) = 4.

Безу теоремасы

Екі бүтін сан a мен b үшін олардың ең үлкен ортақ бөлгіші (ЕҮОБ) $d = gcd\, gcd\ (a, b)$ болса, онда осы d саны a мен b сандарының сызықтық комбинациясы түрінде жазылады. Яғни, бүтін x және y сандары табылады, сондай:

$$d = ax + by\ .$$

Бұл өрнек Безу теоремасы, x және y – безу коэффициенттері деп аталады.

Есеп-1: a=18, b=30

Шешуі:

1. ЕҮОБ табамыз:

$$gcd\, gcd\ (18,30)\ = 6$$

2. Евклид алгоритмі арқылы:

$$30 = 1 * 18 + 12$$
$$18 = 1 * 12 + 6$$
$$12 = 2 * 6 + 0$$

3. Артқа қарай жүріп:

$$6 = 18 - 1 * 30$$
$$\text{бірақ } 12 = 30 - 1 * 18 \rightarrow$$
$$6 = 18 - 1(30 - 1 * 18) = 2 * 18 - 1 * 30$$

Жауабы: $6 = 2 * 18 - 1 * 30$

Есеп-2:

Берілген: a=64, b=40

Шешуі:

1. $gcd\, gcd\ (64,40)\ = 8$
2. Евклид алгоритмі арқылы:

$$64 = 1 * 40 + 24$$
$$40 = 1 * 24 + 8$$
$$24 = 1 * 16 + 8$$
$$16 = 2 * 8 + 0$$

3. Артқа қарай:

$$8 = 24 - 1 * 16$$
$$16 = 40 - 1 * 24 \rightarrow$$
$$8 = 24 - 1(40 - 1 * 24) = 2 * 24 - 1 * 40$$
$$24 = 64 - 1 * 40 \rightarrow$$
$$8 = 2(64 - 1 * 40) - 1 * 40 = 2 * 64 - 3 * 40$$

Жауабы: $8 = 2 * 64 - 3 * 40$

Есеп-3

Берілгені: a=101, b=23

Шешуі:

1. $gcd\, gcd\, (101,23) = 1$
2. Евклид алгоритмі:

$$101 = 4 * 23 + 9$$
$$23 = 2 * 9 + 5$$
$$9 = 1 * 5 + 4$$
$$5 = 1 * 4 + 1$$
$$4 = 4 * 1 + 0$$

3. Артқа қарай:

$$1 = 5 - 1 * 4$$
$$4 = 9 - 1 * 5 \rightarrow 1 = 5 - 1(9 - 1 * 5) = 2 * 5 - 1 * 9$$
$$5 = 23 - 2 * 9 \rightarrow 1 = 5 - 1(9 - 1 * 5) = 2 * 5 - 1 * 9$$
$$9 = 101 - 4 * 23 \rightarrow 1 = 2 * 23 - 5(101 - 4 * 23) = 2 * 23 - 5 * 101 + 20 * 23$$
$$= (20 + 2) * 23 - 5 * 101 = 22 * 23 - 5 * 101$$

Жауабы: $1 = 22 * 23 - 5 * 101$

Қорытынды

Сандар теориясының негізгі әдістері, атап айтқанда, модульдік арифметика әдісі мен Евклидтің бөлгіштік леммасын меңгеру оқушылардың математикалық дағдыларын дамытуда маңызды рөл атқарады. Бұл әдістер сандар арасындағы терең байланыстарды түсіну және күрделі математикалық есептерді шешу үшін қажетті құралдар болып табылады. Модульдік арифметика әдісі әсіресе қалдықтармен жұмыс істеу, сандарды модуль бойынша салыстыру және есептеулерді оңтайландыруда пайдаланылады. Бұл тәсіл тек теориялық мәселелерде ғана емес, практикалық қолданбалы салаларда да кеңінен қолданылады, мысалы, криптографияда, кодтау теориясында және ақпараттық қауіпсіздікте.

Евклидтің бөлгіштік леммасы екі санның ең үлкен ортақ бөлгішін анықтауда, сондай-ақ сызықтық диофант теңдеулерін шешуде маңызды рөл атқарады. Бұл әдіс сандардың өзара бөлінушілік қасиеттерін зерттеу үшін қажетті құрал ретінде жұмыс істейді. Евклид алгоритмі мен Безу тождествосы сияқты техникалар, әсіресе сандық есептеулер мен модульдік арифметикада қолданылатын кері элементтерді табуда шешуші мәнге ие.

Қазіргі таңда бұл әдістердің маңызы артып, оларды терең меңгеру оқушыларға тек олимпиадалық есептерді шешуге ғана емес, сонымен қатар логикалық және аналитикалық ойлау қабілеттерін дамытуға да ықпал етеді. Математика пәні бойынша білімдерін кеңейте отырып, оқушылар күрделі есептерді жеңіл әрі тиімді шешудің жолдарын табады. Бұл дағдылар математикалық сауаттылықты арттырып, ғылыми зерттеулер, инженерлік есептер және басқа да салаларда шешімдер қабылдауды оңайлатады.

Сонымен қатар, Безу теоремасы сияқты маңызды нәтижелерді меңгеру оқушылардың математикалық ойлауын тереңдетіп, олардың математикалық мәдениетін қалыптастырады. Безу теоремасы сандар теориясы мен алгебраның негіздерін түсінуді жетілдіреді, бұл оқу барысында кездесетін әртүрлі есептерді шешуге көмектеседі. Безу тождествосының маңызы, әсіресе модульдік арифметика мен сызықтық диофант теңдеулерін шешуде ерекше. Бұл теореманың қолданылуы сандар арасындағы өзара байланысты түсінуді жеңілдетіп, математикалық проблемаларды тиімді шешуге мүмкіндік береді.

Қорытындылай келе, сандар теориясының әдістерін терең меңгеру оқушыларға болашақта тек академиялық жетістіктерге ғана емес, сонымен қатар ғылыми және инженерлік салаларда да үлкен жетістіктерге жетуге мүмкіндік береді. Бұл әдістер оларды заманауи математикалық мәселелерді шешуге дайын етеді және жоғары деңгейде логикалық ойлау қабілеттерін дамытуға ықпал етеді.

Қолданылған әдебиеттер тізімі:

1. Дорофеев Г.В., “Теория чисел: учебное пособие”, Москва, Наука, 2012.
2. Невзоров И.Ю., “Элементарная теория чисел”, Санкт-Петербург, 2015.
3. Кнауэр В., “Основы теории чисел”, М.: Физматлит, 2009.
4. Apostol T.M., “Introduction to Analytic Number Theory”, Springer, 1976.
5. Hardy G.H., Wright E.M., “An Introduction to the Theory of Numbers”, Oxford University Press, 2008.